Voir le corrigé

Un urne contient 5 boules rouges, 4 boules jaunes et n boules vertes indiscernables au toucher. On tire successivement et avec remise deux boules dans l'urne.

1. Exprimer la probabilité des événements suivants en fonction de n :

M :« les deux boules obtenues sont de la même couleur »

D :« Les deux boules sont de couleurs différentes »

2. Pour ce tirage, le joueur gagne 2 euros si les deux boules obtenues sont de même couleur et perd 3 euros sinon.

On note X la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) obtenu par le joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Montrer que l'espérance de X est $E(X) = \dfrac{2(n^2 - 27n - 19)}{(n+9)^2}$

3. On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2(x^2 - 27x - 19)}{(x+9)^2}$

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Résoudre $f(x) = 0$

c) Déterminer la valeur de n pour laquelle $E(X)$ est minimale ?

A partir de quelle valeur de n, $E(X)$ est positif ? interpréter le résultat.

J-F Lecarpentier - 1S –exercice corrigé : variables aléatoires et étude de fonction

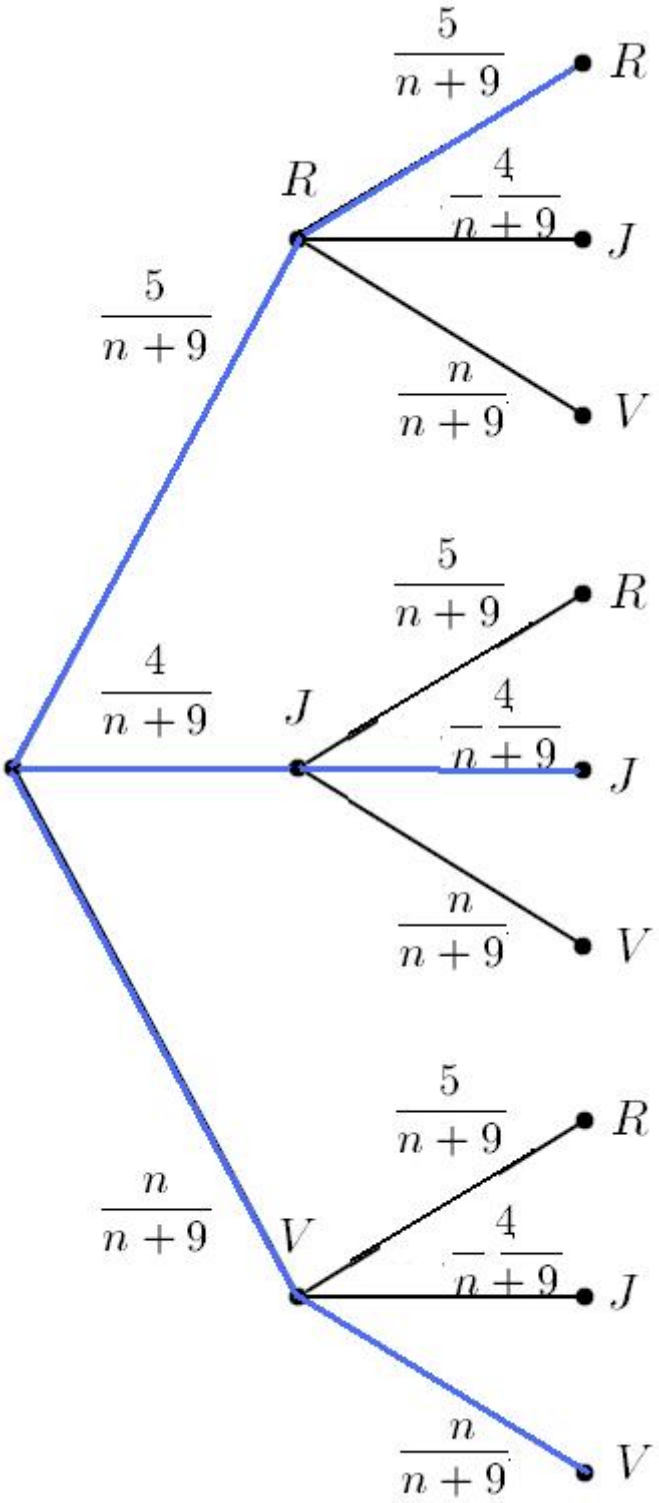
J-F Lecarpentier -1S –exercice corrigé : variables aléatoires et étude de fonction

Voir le texte de l'exercice

1. Exprimer la probabilité des événements suivants en fonction de n :

☛ **Solution**:

Il y a au total $n+5+4=n+9$ boules.
On peut construire l'arbre suivant :



J-F Lecarpentier - 1S –exercice corrigé : variables aléatoires et étude de fonction

J-F Lecarpentier -1S –exercice corrigé : variables aléatoires et étude de fonction

M :« les deux boules obtenues sont de la même couleur »

☛ **Solution**:

Voir les parcours en bleu sur l'arbre

$$\begin{aligned} p(M) &= \frac{5}{n+9} \times \frac{5}{n+9} + \frac{4}{n+9} \times \frac{4}{n+9} + \frac{n}{n+9} \times \frac{n}{n+9} \\ &= \frac{25+16+n^2}{(n+9)^2} \\ &= \frac{n^2+41}{(n+9)^2} \end{aligned}$$

D :« Les deux boules sont de couleurs différentes »

☛ **Solution**:

$$\begin{aligned} p(D) = p(\overline{M}) &= 1 - p(M) \\ &= 1 - \frac{n^2+41}{(n+9)^2} \\ &= \frac{(n+9)^2 - (n^2+41)}{(n+9)^2} \\ &= \frac{n^2+18n+81-n^2-41)}{(n+9)^2} \\ &= \frac{18n+40)}{(n+9)^2} \end{aligned}$$

2. Pour ce tirage, le joueur gagne 2 euros si les deux boules obtenues sont de même couleur et perd 3 euros sinon.

On note X la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) obtenu par le joueur.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

☛ **Solution**:

X_i	2	-3
$p(X = X_i)$	$p(M)$	$p(D)$

b) Montrer que l'espérance de X est $E(X) = \dfrac{2(n^2-27n-19)}{(n+9)^2}$

☛ **Solution**:

$$\begin{aligned} E(X) &= 2 \times p(M) - 3 \times p(D) \\ &= \frac{2(n^2+41) - 3(18n+40)}{(n+9)^2} \\ &= \frac{2n^2+82-54n-120)}{(n+9)^2} \\ &= \frac{2n^2-54n-38)}{(n+9)^2} \\ &= \frac{2(n^2-27n-19)}{(n+9)^2} \end{aligned}$$

3. On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2(x^2-27x-19)}{(x+9)^2}$

J-F Lecarpentier - 1S –exercice corrigé : variables aléatoires et étude de fonction

J-F Lecarpentier -1S –exercice corrigé : variables aléatoires et étude de fonction

a) Dresser le tableau de variation de f.

☛ **Solution**:

- Calcul de $f'(x)$:
  On pose $u(x) = 2(x^2 - 27x - 19)$ et $v(x) = (x+9)^2 = x^2 + 18x + 81$
  et on a $u'(x) = 2(2x - 27) = 4x - 54$ et $v'(x) = 2x + 18$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$
$$= \frac{(4x-54)(x^2+18x+81) - (2x^2-54x-38)(2x+18)}{((x+9)^2)^2}$$
$$= \frac{(4x^3+72x^2+324x-54x^2-972x-4374-4x^3-36x^2+108x^2+972x+76x+684}{(x+9)^4}$$
$$= \frac{90x^2+400x-3690}{(x+9)^4}$$
$$= \frac{10(9x^2+40x-369)}{(x+9)^4}$$

- Etude du signe de $f'(x)$:
  $(x+9)^4 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $9x^2 + 40x - 369$
- Racines de $9x^2 + 40x - 369$
  $\Delta = 40^2 - 4 \times 9 \times (-369) = 14884 = 122^2$
  $\Delta > 0$ donc il y a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40-122}{18} = -9 \notin [1; +\infty[$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-40+122}{18} = \frac{82}{18} = \frac{41}{9} \in [1; +\infty[$$

$x_2 \simeq 4,6$

- signe de $9x^2 + 40x - 369$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$9x^2+40x-369$		$+$ signe de a coef. de x^2 à « l'extérieur » des racines	0	$-$ signe de $-a$ coef. à de x^2 « entre » à les racines	0	$+$ signe de a coef. de x^2 à « l'extérieur » des racines	

- Variations de f :

x	1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(1)$	↘	$f(x_2)$	↗	

avec $f(1) = -1,1$

J-F Lecarpentier - 1S –exercice corrigé : variables aléatoires et étude de fonction

J-F Lecarpentier -1S –exercice corrigé : variables aléatoires et étude de fonction

b) Résoudre $f(x) = 0$

☛ **Solution**:

$f(x) = 0 \iff \dfrac{2(x^2 - 27x - 19)}{(x+9)^2} \iff x^2 - 27x - 19 = 0$
$\Delta' = 27^2 - 4 \times (-19) = 805$
$\Delta' > 0$ donc il y a deux solutions :
$x'_1 = \dfrac{27 + \sqrt{805}}{2} \simeq 27,7$
et
$x'_2 = \dfrac{27 - \sqrt{805}}{2} \simeq -0,7$ $x_2 \notin [0; +\infty[$
donc $S = \{x'_1\}$

c) Déterminer la valeur de n pour laquelle $E(X)$ est minimale ?

☛ **Solution**:

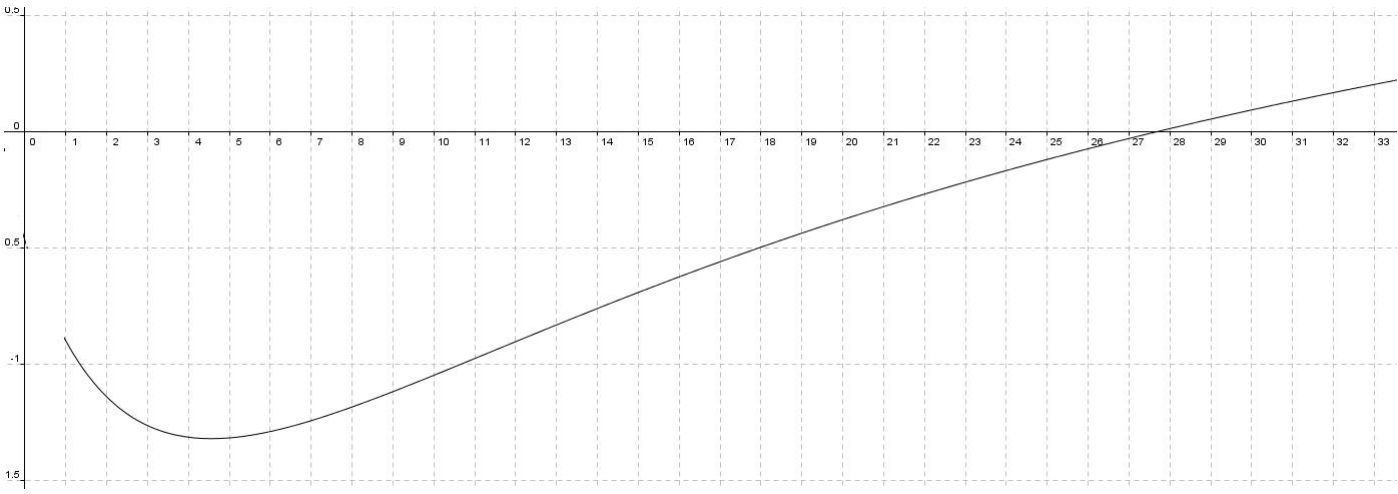
$E(X) = f(n)$
et f atteint son minimum en $x_2 \simeq 4,6$
donc $E(X)$ est minimum pour $n = 4$ ou $n = 5$
Calcul de pour $n = 4$: $E(X) = f(4) = \dfrac{2(4^2 - 27 \times 4 - 19)}{(4+9)^2} \simeq 1,313$ arrondi à 0,001
Calcul de pour $n = 5$: $E(X) = f(5) = \dfrac{2(5^2 - 27 \times 5 - 19)}{(5+9)^2} \simeq 1,316$ arrondi à 0,001
Donc on a $E(X)$ minimum pour $n = 4$

A partir de quelle valeur de n, $E(X)$ est positif ? interpréter le résultat.

☛ **Solution**:

$f(x) = 0$ pour $x = x'_2 \simeq 27,7$
D'après le tableau de variation de f, $E(X)$ sera positif avec au minimum 28 boules vertes.

Courbe représentative de la fonction f donnée à titre indicatif :



J-F Lecarpentier - 1S –exercice corrigé : variables aléatoires et étude de fonction
J-F Lecarpentier -1S –exercice corrigé : variables aléatoires et étude de fonction