Equation d'un cercle

Voir le corrigé

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On donne $A(2;4)$, $B(4;-2)$ et $C(-3;1)$

1. Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$

2. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre C et rayon 5.

3. Déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle défini par l'équation $x^2+6x+y^2-3y=0$

Voir le texte de l'exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On donne $A(2;4)$, $B(4;-2)$ et $C(-3;1)$

1. Soit $M(x;y)$ un point du cercle de diamètre $[AB]$:

$$\begin{cases} x_{\overrightarrow{AM}} = x_M - x_A = x - 2 \\ y_{\overrightarrow{AM}} = y_M - y_A = y - 4 \end{cases}$$

donc $\overrightarrow{AM}(x-2;y-4)$

$$\begin{cases} x_{\overrightarrow{BM}} = x_M - x_B = x - 4 \\ y_{\overrightarrow{BM}} = y_M - y_B = y - (-2) = y + 2 \end{cases}$$

donc $\overrightarrow{BM}(x-4;y+2)$

M appartient au cercle de diamètre $[AB]$

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$

$\Longleftrightarrow (x-2)(x-4)+(y-4)(y+2)=0$

Une équation du cercle de diamètre $[AB]$ est $(x-2)(x-4)+(y-4)(y+2)=0$

Autre méthode :

Le centre du cercle de diamètre $[AB]$ est le milieu I de $[AB]$.

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 3 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 1 \end{cases}$$

donc $I(3;1)$ est le centre du cercle

et le rayon du cercle est

$r = \dfrac{AB}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{40}}{2} = \dfrac{2\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$

Une équation cartésienne du cercle de centre I et rayon $r=\sqrt{10}$ est $(x-3)^2+(y-1)^2=10$ ($(x-x_I)^2+(y-y_I)^2=r^2$)

Remarque : les deux équations obtenues sont équivalentes :

$(x-2)(x-4)+(y-4)(y+2)=0$

$\Longleftrightarrow x^2-4x-2x+8+y^2-4y+2y-8=0$

$\Longleftrightarrow x^2-6x+y^2-2y=0$

et

$(x-3)^2+(y-1)^2=10$

$\Longleftrightarrow x^2-6x+9+y^2-2y+1=10$

$\Longleftrightarrow x^2-6x+y^2-2y=0$

2. Une équation cartésienne du cercle de centre $C(-3;1)$ et rayon 5 est $(x-x_C)^2+(y-y_C)^2=r^2$ soit $(x+3)^2+(y-1)^2=25$

3. $x^2+6x+y^2-3y=0$

$\Longleftrightarrow (x+3)^2-9+(y-\dfrac{3}{2})^2-\dfrac{9}{4}=0$

$\Longleftrightarrow (x+3)^2+(y-\dfrac{3}{2})^2=9+\dfrac{9}{4}$

$\iff (x-(-3))^2+(y-\dfrac{3}{2})^2=\dfrac{45}{4}$

donc le cercle d'équation $x^2+6x+y^2-3y=0$ a pour centre le point $I(-3;\dfrac{3}{2})$ et pour rayon $\sqrt{\dfrac{45}{4}}=\dfrac{\sqrt{45}}{2}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$