

Voir le corrigé

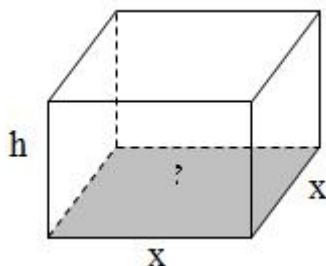
Problème d'optimisation : On veut fabriquer des réservoirs fermés en tôle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle à base carrée.

Le volume de ces réservoirs doit être de 1m^3 .

Quelles sont les dimensions du réservoir si on veut utiliser le moins de tôle possible ?

Voir le texte de l'exercice

Schéma en notant x la longueur des côtés de la base et h la hauteur du réservoir en mètres :



Le volume du réservoir est de $V = x \times x \times h = hx^2 \text{ m}^3$

et on a donc $x^2 h = 1$.

L'aire totale des parois du réservoir est de :

$$A = 2 \times x^2 + 4 \times xh = 2x^2 + 4hx \text{ m}^2$$

On peut supposer $h \neq 0$ et $x \neq 0$ sinon le volume est de 0 m^3

$$\text{donc } h = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{et on a alors } A = 2x^2 + \frac{4x}{x^2} = 2x^2 + \frac{4}{x}$$

Recherche de l'aire minimale :

On pose $f(x) = 2x^2 + \frac{4}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$

- Calcul de $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 2x + 4 \times \frac{-1}{x^2} \quad (\text{rappel : } \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}) \\ &= \frac{4x^3 - 4}{x^2} \\ &= \frac{4(x^3 - 1)}{x^2} \end{aligned}$$

- étude du signe de $f'(x)$

On a $x^2 > 0$ sur $]0; +\infty[$

donc $f'(x)$ est du signe de $x^3 - 1$.

- étude du signe de $x^3 - 1$

1 est une racine de $x^3 - 1$ donc $x^3 - 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

$$(x - 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c = ax^3 + bx^2 - ax^2 + cx - bx - c$$

Par identification des coefficients (voir schéma) :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 0 \\ -c = -1 \end{cases}$$

$$x^3 - 1 = x^3 + 0x^2 + 0x - 1$$

donc $a = 1$, $c = 1$ et $b = a = 1$

$$\text{soit } x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

- étude du signe de $x^2 + x + 1$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3$$

donc il n'y a pas de racines et $x^2 + x + 1$ est du signe de $a = 1$ coefficient de x^2

donc $x^2 + x + 1 > 0$ et $x^3 - 1$ est du signe de $x - 1$

donc $f'(x) < 0$ sur $]0; 1]$

et $f'(x) > 0$ sur $[1; +\infty[$

- conclusion

On a donc f croissante sur $]0; 1[$ et f décroissante sur $[1; +\infty[$

donc f admet un minimum en $x = 1$.

L'aire de tôle utilisée sera alors de $f(1) = 2 + \frac{4}{1} = 6 \text{ m}^2$

et les dimensions du réservoir seront de 1m sur 1m pour une hauteur de $h = \frac{1}{1^2} = 1 \text{ m}$ (rappel : $hx^2 = 1$)
soit pour un réservoir cubique de côté 1m.